

關於「直角三角比」在國中階段的學習內容說明

國家教育研究院

有關國中九年級數學直角三角比課程範圍是否包含三角函數？是否納入紙筆評量？引發諸多國中老師關心。國教院就此議題說明如下：

一、108數學領綱國中階段未納入三角函數教學

國中階段有關直角三角形邊長比值之學習內容為S-9-4，其學習內容並未涉及三角函數及其符號之教學。

編碼	學習內容條目及說明	備註	參考教具	對應學習表現
S-9-4	相似直角三角形邊長比值的不變性：直角三角形中某一銳角的角度決定邊長比值，該比值為不變量，不因相似直角三角形的大小而改變；三內角為 $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ 其邊長比記錄為「 $1:\sqrt{3}:2$ 」；三內角為 $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ 其邊長比記錄為「 $1:1:\sqrt{2}$ 」。	學生無使用計算機時，角度限於 30° 、 45° 、 60° 。	計算機	s-IV-10 s-IV-12 n-IV-9

二、s-IV-12所指認識直角三角形邊長間的比值關係，認識比值符號，教師教學可介紹學生認識生活中常見的符號，並未專指 $\sin$ 、 $\cos$ 、 $\tan$ 符號。

學習表現s-IV-12「理解直角三角形中某一銳角的角度決定邊長的比值，認識這些比值的符號，並能運用到日常生活的情境解決問題。」

本項學習表現所指認識比值符號，教師教學時可介紹學生認識日常生活常見的符號，例如：坡度（%、‰）。惟教師如基於介紹學生運用計算機，亦僅止於了解符號意義及限於計算機的應用，勿延伸紙筆計算練習。

三、108數學課綱提倡培養學生正確使用工具的素養，惟學校課室教學、評量及高風險測驗（例如會考），仍須視學生能否充分及公平使用計算機，若無法滿足前項條件，有關直角三角比之教學及紙筆評量限於 30° 、 45° 、 60° 等特殊角。

關於「直角三角比」在國中階段的學習示例

壹、示例的研發說明

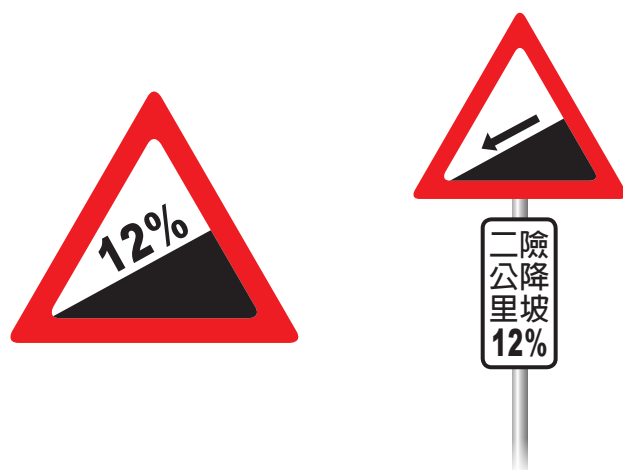
有關「s-IV-12 理解直角三角形中某一銳角的角度決定邊長的比值，認識這些比值的符號，並能運用到日常生活的情境解決問題。」此學習表現的重點不在符號，而是著重於直角三角形中某一銳角決定了恆定的邊長比值。故在此教學時宜結合相似三角形間有著「邊長成比例」的關係，讓學生在日常生活中能更有效運用這類概念。

貳、示例內容



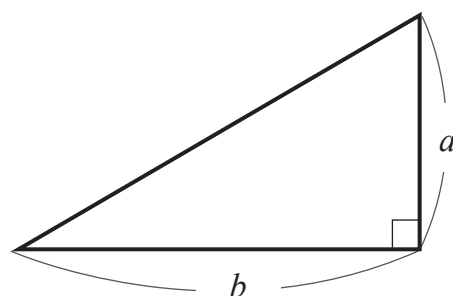
第一題

「坡度百分比」表示一個坡的斜度。生活中的道路常常看到這類的告示牌。您了解它代表的意義嗎？



如圖，垂直上升高度為 a 、水平移動距離為 b ，則：

坡度百分比 = $\frac{\text{垂直上升高度}}{\text{水平移動距離}} \times 100\%$ ，即 $\frac{a}{b} \times 100\%$ 。



如圖，若小寬在某一斜坡騎乘自行車，則：

- (1) 若從 A 點騎至 B 點時，水平移動距離約為200公尺、垂直上升高度約為25公尺，則坡度為多少%？



註：此圖僅為示意，並不符合坡度數值。

參考答案：12.5%。 $\frac{25}{200} \times 100\% = 12.5\%$ 。

- (2) 若小寬從 A 點騎至 C 點時，發現水平移動的距離為80公尺，則上升高度約為多少公尺？

參考答案：10公尺。

建議解法：設上升高度為 x 公尺，則 $\frac{x}{80} = \frac{25}{200}$ ， $x = 10$ 。

(3) 若小寬從A點出發，在斜坡 ($\overline{AB}$) 上騎了100公尺，則他上升了幾公尺？

(使用計算機，並四捨五入取至小數第一位)

參考答案：近似於12.4公尺。

建議解法： $\sqrt{8^2+1^2}=\sqrt{65}$ ，所以上升高度為 $100 \times \frac{1}{\sqrt{65}} \div 12.4$ 公尺。

教學建議：當坡度小的時候，斜面距離和水平距離相差很小，量感素養也很重要喔！

現實生活的道路有緩有急，很少會在整條道路上維持同樣的坡度，但是我們可以將其分成一段一段坡度不同的路段。以市區道路或是省道、縣道、鄉道為例，坡度不會超過12%。



動動腦

(1) 沿斜坡運動的距離，比水平移動的距離長還是短？你覺得理由是甚麼？坡度大相對於坡度小的斜坡，同樣的水平移動距離，實際上沿斜坡的運動距離是較長還是較短？你覺得理由是甚麼？

參考答案：根據畢氏定理，斜坡運動的距離 $=\sqrt{\text{水平移動距離}^2+\text{鉛直上升高度}^2}$ ，所以斜坡運動的距離比水平移動的距離長。至於同樣的水平移動距離，坡度大的斜坡垂直上升高度較大，實際上沿斜坡的運動距離較長。

- (2) 以台三線中埔到永興一段長達二十幾公里的上坡為例，其中有一段水平位移100公尺的10%坡道，實際道路長度是多少公尺（使用計算機，並四捨五入取至小數第一位）

考答案：100.5公尺。

建議解法： $\sqrt{100^2+10^2} \div 100 \approx 100.5$ (公尺)。

由此可見，對所有正式的道路而言，粗略來說可以把水平位移的長度（地圖上或是Google Maps上所標示的距離），就當作實際道路上的運動距離。

- (3) 自行車比賽常用「坡度百分比」來代表爬坡的難度。

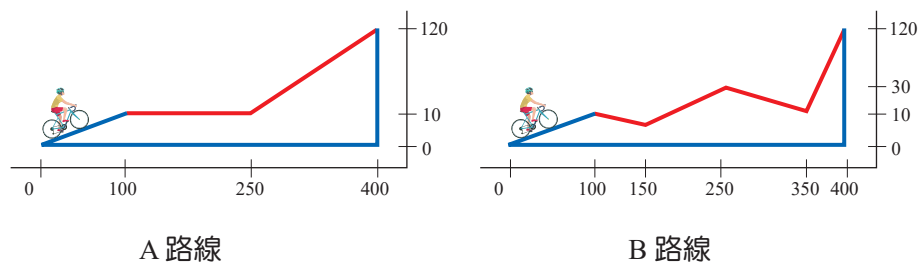
坡度(%)	路況
0%	平路
1%~3%	緩坡。騎乘感覺類似在逆風下的騎乘感覺。
4%~7%	對於大部分騎士，都可以挑戰此坡度。但長時間的騎乘，將有疲勞痠痛的感覺產生。
8%~10%	陡坡。對於有經驗的騎士，這種坡度的騎乘已會產生不舒服及筋疲力竭的感覺；對於初階的騎士，這坡度會是極大挑戰，往往超出體力的負荷。
≥11%	極陡坡。對於職業騎士都是蠻大的挑戰。業餘騎士在這坡度騎乘下，往往會產生痛苦及力不從心的感覺。

如果某次自行車比賽中有一段山坡稱之為「陡坡」，已知其水平移動距離為160公尺，垂直上升高度介於 x 公尺與 y 公尺之間($x < y$)，則 x 、 y 值分別是多少？

參考答案： $x=12.8$ 、 $y=16$ 。 $\frac{y}{160}=10\%$ ， $y=16$ ； $\frac{x}{160}=8\%$ ， $x=12.8$ 。

生活中說的「速率」，其實是指「平均速率」。同樣地，生活中所謂的「坡度」，其實是「平均坡度」。也就是不管路途中的起伏變化，某路段的「坡度」只管頭尾。

(4) 下列兩個圖形中，垂直上升高度與水平移動距離均為相同，只從騎乘的始點與終點來計算，兩條路線有著相同的坡度百分比，我們稱之為「平均坡度」。請問您覺得A、B兩條路線的難度相同嗎？說說您的理由。



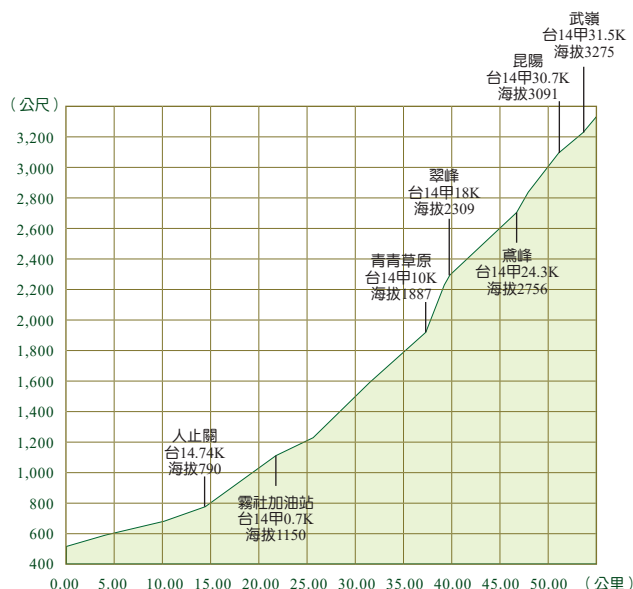
參考答案：

- (1) 學生認為A路線有2個爬升坡，B路線有3個爬升坡、2個險降坡，所以B路線的難度較高。
- (2) 學生認為B路線B有兩段下坡，所以路線B比較「容易」。
- (3) 學生使用數據計算坡度，以合理的方式表述哪一條路線難度較高。
- (4) 學生使用數據計算平均坡度，認為兩條路線難度相同。



第二題

「西進武嶺」是著名的單車路線，騎士從埔里的台灣地理中心碑出發，一路克服台14甲線公路的許多陡坡，攻上全國公路最高點武嶺。下圖是西進武嶺距離與海拔高度的關係，計算翠峰到鳶峰的坡度為何？（使用計算機，並四捨五入取至小數第一位）



參考答案： $(2756-2309) / (24300-18000) \div 7.1\%$



第三題

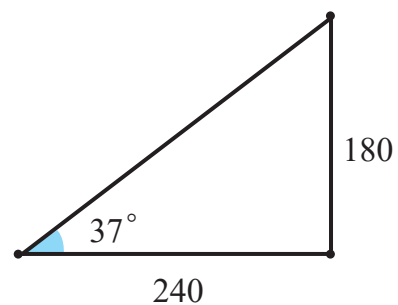
在奧地利舉辦的 Red Bull 400公尺賽跑(圖(一)、(二))，是一個將滑雪道，改造成400公尺跑道的比賽，其中前半段是草地，後半段是水泥地，水泥跑道的側面如圖(三)所示，在240公尺的距離，高度上升了180公尺，跑道與地平線的夾角，大約是37度，媒體報導這是世界上最陡峭的比賽，計算此水泥跑道部分的坡度與長度為何？



圖一 引用自2021/12/13 https://commons.wikimedia.org/wiki/File:PLANICA_RATE%C4%8CE_-_panoramio.jpg



圖二 引用自2021/12/13 https://commons.wikimedia.org/wiki/File:RedBull400_2011.jpg



圖三

參考答案：坡度： $180/240 = 0.75 = 75\%$ ，水泥跑道長度： $\sqrt{240^2 + 180^2} = 300$ 公尺。

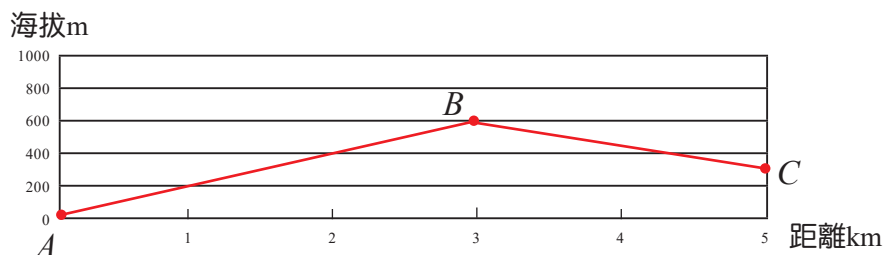


第四題

若有一段公路的地點與距離之間關係如下表：

地點	A地	B地	C地
距離	0 km	3 km	5 km

若A地到B地的海拔為持續上升，坡度為20%，B地到C地的海拔為持續下降，坡度為15%，完成距離與海拔高度的關係圖。



$$3000 \times 20\% = 600 \text{ (公尺)}$$

$$2000 \times 15\% = 300 \text{ (公尺)}$$

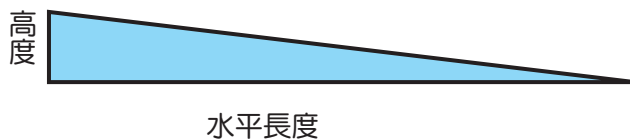
$$600 - 300 = 300 \text{ (公尺)}$$



回家練習題

無障礙坡道的坡度（垂直高度與水平長度之比）不得大於 $\frac{1}{12}$ ，高低差小於20公分者，其坡度得酌予放寬，惟不得超過下表規定。

高低差	20公分以下	5公分以下	3公分以下
坡度	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$

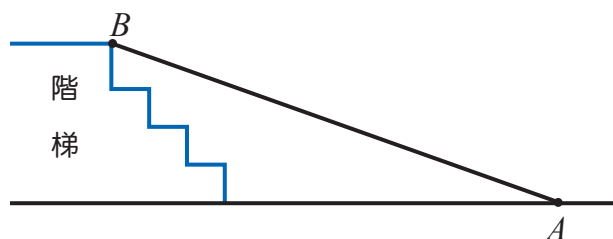


(1) 一條無障礙坡道的高低差為15公分，則其水平長度最長、最短可以分別為多少公尺？

參考答案：最長1.8公尺，最短1.5公尺。設水平長度為 x 公分，

$$\frac{15}{x} = \frac{1}{12}, x = 180; \frac{15}{x} = \frac{1}{10}, x = 150。$$

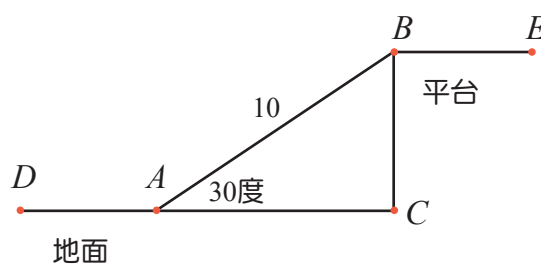
- (2) 如圖，校園裡的階梯每一階高度為20公分，爲了要臨時搭建一條符合坡度爲 $\frac{1}{12}$ 爲無障礙通道提供通行，則長 $\overline{AB}$ 爲多少公分？



參考答案： $80\sqrt{145}$ 公分，約爲963公分。

因爲 $\sqrt{1^2+12^2}=\sqrt{145}$ ，所以 $\overline{AB}=80\sqrt{145}$ 公分，所以約爲963公分。

- (3) 如圖，極限運動場利用 $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ 的三角形，設置一個10公尺長的滑板賽道，則平台距離地面高度爲何？此賽道的坡度爲何？(使用計算機，並四捨五入取至小數第一位)



參考答案： $10 : \overline{BC} = 2 : 1$ ，得高度爲 5 公尺。

$(1/\sqrt{3}) \div 0.5773 = 57.73\% \div = 57.7\%$ 。